Lógica

Lógica de Primer Orden: sintaxis vs. semántica

Damiano Zanardini

Graduado/a en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2010/2011

Sintaxis vs. semántica

Sistemas formales

Un *sistema formal de demostración* consiste en:

- un lenguaje formal (alfabeto y reglas de formación de fórmulas)
- un conjunto de *axiomas lógicos* (fórmulas válidas, sin prueba)
- un conjunto de *reglas de inferencia* para demostrar nuevas fórmulas
- una definición de demostración

Teorías

Una *teoría* T es un sistema formal ampliado con un conjunto Γ de axiomas no lógicos (es decir que se consideran como verdad)

$$T[\Gamma]$$

- si $\Gamma = \emptyset$ entonces T es la *teoría básica* del sistema formal

Sintaxis vs. semántica

Demostraciones

Una *demostración* o *prueba* de una fórmula G en una teoría $T[\Gamma]$ (escrito $T[\Gamma] \vdash G$) es una secuencia *finita* de fórmulas tal que

- toda fórmula de la secuencia es
  - un axioma lógico o no lógico de la teoría; o
  - el resultado de la aplicación de una regla de inferencia a fórmulas anteriores en la secuencia
- G es la última fórmula de la secuencia

Teoremas (de una teoría)

- un *teorema* de la teoría $T[\Gamma]$ es una fórmula para la que existe al menos una prueba en $T[\Gamma]$

Sintaxis vs. semántica

Teorema (corrección (validez))

Todos los teoremas de $T[\Gamma]$ son consecuencias lógicas suyas:

$$\textit{si } T[\Gamma] \vdash G \textit{ entonces } \Gamma \models G$$

Teorema (completitud)

Dada una teoría $T[\Gamma]$, todas las consecuencias lógicas de Γ son teoremas de $T[\Gamma]$:

$$\textit{si } \Gamma \models G \textit{ entonces } T[\Gamma] \vdash G$$

Teorema (Deducción)

- $\{F_1, .., F_n\} \cup \Gamma \models G \quad \textit{sii} \quad \Gamma \models (F_1 \wedge .. \wedge F_n) \rightarrow G$
- $T[\{F_1, .., F_n\} \cup \Gamma] \vdash G \quad \textit{sii} \quad T[\Gamma] \vdash (F_1 \wedge .. \wedge F_n) \rightarrow G$

Sintaxis vs. semántica

Teorema (corrección (validez))

Todos los teoremas de $T[\Gamma]$ son consecuencias lógicas suyas:

$$si\ T[\Gamma] \vdash G\ entonces\ \Gamma \models G$$

Teorema (completitud)

Dada una teoría $T[\Gamma]$, todas las consecuencias lógicas de Γ son teoremas de $T[\Gamma]$:

$$si\ \Gamma \models G\ entonces\ T[\Gamma] \vdash G$$

Teorema (Deducción)

- $\{F_1, .., F_n\} \cup \Gamma \models G \quad sii \quad \Gamma \models (F_1 \wedge .. \wedge F_n) \rightarrow G$
- $T[\{F_1, .., F_n\} \cup \Gamma] \vdash G \quad sii \quad T[\Gamma] \vdash (F_1 \wedge .. \wedge F_n) \rightarrow G$
- $T[\{F_1, .., F_n\}] \vdash G \quad sii \quad VAL((F_1 \wedge .. \wedge F_n) \rightarrow G)$

Sintaxis vs. semántica

Teorema (corrección (validez))

Todos los teoremas de $T[\Gamma]$ son consecuencias lógicas suyas:

$$si\ T[\Gamma] \vdash G\ entonces\ \Gamma \models G$$

Teorema (completitud)

Dada una teoría $T[\Gamma]$, todas las consecuencias lógicas de Γ son teoremas de $T[\Gamma]$:

$$si\ \Gamma \models G\ entonces\ T[\Gamma] \vdash G$$

Teorema (Deducción)

- $\{F_1, .., F_n\} \cup \Gamma \models G \quad sii \quad \Gamma \models (F_1 \wedge .. \wedge F_n) \rightarrow G$
- $T[\{F_1, .., F_n\} \cup \Gamma] \vdash G \quad sii \quad T[\Gamma] \vdash (F_1 \wedge .. \wedge F_n) \rightarrow G$
- $T[\{F_1, .., F_n\}] \vdash G \quad sii \quad VAL((F_1 \wedge .. \wedge F_n) \rightarrow G)$
- $T[\{F_1, .., F_n\}] \vdash G \quad sii \quad INSAT(F_1 \wedge .. \wedge F_n \wedge \neg G)$

Cosas importantes

Cuidado con estas frases (¿tienen sentido?)

- la interpretación $\mathcal{I}$ es satisfacible
- existe un modelo válido para F
- una fórmula F hace falsa a una interpretación I
- para probar que una fórmula es satisfacible se necesita una interpretación verdadera
- un literal es un término afirmado o negado

☞ no nos estamos preguntando si estas frases son verdaderas o falsas: uńicamente si tienen sentido

Cosas importantes

Tipos

- una función de aridad n no aparece *nunca* en el mismo sistema formal con aridad $m \neq n$
- un predicado de aridad n no aparece *nunca* en el mismo sistema formal con aridad $m \neq n$
- una función no es un predicado
- un predicado no es una función

Igualdad

- el predicado $=/2$ es especial porque normalmente se le da un significado estándar
- ¡pero también se podría redefinir!

Cosas importantes

Interpretaciones e imaginación

Cuando quieremos demostrar que una fórmula no es válida, sólo tenemos que hallar un contramodelo

- podemos elegir *cualquier* dominio D y función de interpretación I
- también podríamos elegir que $s(45) = 46$ $s(46) =$  ...

Cosas importantes

Implicación

- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera
- si la parte izquierda de una implicación es falsa la implicación es verdadera

Implicación (2)

- *todas las manzanas rojas están buenas*

$$\forall x((manzana(x) \wedge roja(x)) \rightarrow buena(x))$$

  - hay manzanas buenas y rojas
  - todas las manzanas son rojas y están buenas
  - no hay ninguna manzana roja que no esté buena
  - el conjunto de las manzanas buenas es un superconjunto del de las manzanas rojas
  - cuando una manzana no está buena no puede ser roja
  - cuando una manzana no está buena tiene que ser roja

- *existe una manzana amarilla que está mala*

$$\exists x(manzana(x) \wedge amarilla(x) \wedge mala(x))$$

  - cuando una manzana es amarilla está mala
  - existe al menos un objeto amarillo que está malo y que es una manzana
  - cada vez que una manzana está buena no es amarilla

Cosas importantes

Implicación (2)

- *todas las manzanas rojas están buenas*

$$\forall x((manzana(x) \wedge roja(x)) \rightarrow buena(x))$$

  - hay manzanas buenas y rojas $\rightsquigarrow$ NO
  - todas las manzanas son rojas y están buenas $\rightsquigarrow$ NO
  - no hay ninguna manzana roja que no esté buena $\rightsquigarrow$ SÍ
  - el conjunto de las manzanas buenas es un superconjunto del de las manzanas rojas $\rightsquigarrow$ SÍ
  - cuando una manzana no está buena no puede ser roja $\rightsquigarrow$ SÍ
  - cuando una manzana no está buena tiene que ser roja $\rightsquigarrow$ NO

- *existe una manzana amarilla que está mala*

$$\exists x(manzana(x) \wedge amarilla(x) \wedge mala(x))$$

  - cuando una manzana es amarilla está mala $\rightsquigarrow$ NO
  - existe al menos un objeto amarillo que está malo y que es una manzana $\rightsquigarrow$ SÍ
  - cada vez que una manzana está buena no es amarilla $\rightsquigarrow$ NO